Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)
Кафедра математического анализа
и методики преподавания математики

519.8(07)
Д463

В.Л. Дильман

НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ

Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2020

УДК 519.8(075.8)

Д463

Одобрено
учебно-методической комиссией
Института естественных и точных наук ЮУрГУ

Рецензенты:
д. ф.-м. н. профессор В.Е. Федоров,
к. т. н. доцент А.Л. Королев.

Дильман, В.Л.

Д463 Непрерывные модели: учебное пособие / В.Л. Дильман. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2020. – 45 с.

Учебное пособие посвящено методам построения и исследования непрерывных математических моделей.

В пособии обсуждаются методологические и методические вопросы математического моделирования, средства и подходы к построению математических моделей, вопросы, связанные с проверкой корректности математических моделей, адекватностью и уточнением математических моделей, использованием различных типов уравнений в моделях.

Пособие адресовано учащимся магистратуры по направлению 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика», направленности «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин и систем» и «Педагогические технологии в преподавании математики и информатики» при изучении дисциплины «Непрерывные модели».

Пособие может быть использовано студентами бакалавриата, обучающимся по направлениям 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 01.03.03 «Механика и математической моделирование», 03.03.01 «Прикладная математика и физика» и студентами инженерных направлений. Оно может быть полезно учителям математики и физики муниципальных образовательных учреждений среднего звена (школ, гимназий, лицеев, средних специальных учебных заведений), школьникам, интересующимся прикладной математикой, преподавателям вузов.

УДК 519.8(975.8)

Оглавление

Введение

Математическое моделирование существовало столько, сколько существует наука как социальное явление, как средство познания мира и попытка приспособиться к нему и, насколько возможно, поставить себе на службу его явления. Само себе восприятие объектов окружающего мира содержит смысл математического моделирования как изучение их не во всеобщей полноте, а как некоторой их упрощенной копии. С развитием науки возникла потребность обработки ее результатов, полученных в виде каких-то зависимостей (например, дифференциальных уравнений), и эта обработка приводила к необходимости непомерно сложных вычислений. Такое положение дел дало стимул развитию численных методов и вычислительных средств, но и математическому моделированию, когда более удачная модель объекта позволяла и получать новое знание и в виде качественных результатов, и как следствие исследования и решения менее сложных вычислительных систем. Таким образом, математическое моделирование – это и всеобъемлющая научная дисциплина, и тотальный метод исследования. Особенностью математического моделирования является общая схема изучения, возможно, любых объектов и методика конструирования и обработки математических моделей вне зависимости от их конкретного смысла. Адепты математического моделирования утверждают, что вся современная техника и технология, интернет, авиация, транспорт, космос, компьютеры и оргтехника, атомная энергетика, машиностроение, приборостроение, средства связи и управления, определившие современное состояние жизни, основаны на успехах фундаментальной науки и являются детищем математического моделирования.

Цели и задачи математического моделирования могут быть кратко сформулированы как качественное и количественное изучение всевозможных объектов и явлений природы, техники и общества. При этом под качественным изучением подразумевается достижение понимания существа изучаемого объекта, его свойств, поведения, возможных явлений и определяющих их причин. Общая схема математического моделирования в значительной мере устоялась, а ее реализация опирается на фундаментальную науку, методы исследования математических моделей (аналитические, качественные и численные) и на современную вычислительную технику. Вместе с тем продумывание этой схемы обнаруживает в ней действия, неподдающиеся формализации. Это прежде всего относится к построению модели и отчасти к ее исследованию. То, что не формализуемо, можно отнести к искусству моделирования. Требования от математического моделирования точных количественных результатов и полного качественного исследования процесса или объекта противоположны: первое требует достаточно полного учета многих факторов, усложняющих модель; второе, напротив, тем более реализуемо, чем проще модель.

При исследовании объекта естественно стремиться к построению возможно более простых моделей с точки зрения возможностей работы с ними, но обеспечивающими «удовлетворительную адекватность» изучаемым объектам. Впрочем, если модели лишь частично и односторонне оценивают рассматриваемый объект, для качественной, а иногда и количественной оценки, они полезны, причем полученные с их помощью представления позволяют строить более точные модели («каскад» моделей). На примере простых моделей, использованных в пособии, рассматривается сущность математического моделирования, общие принципы построения математических моделей, средства и источники получения математических моделей, корректность применения тех или иных научных знаний, возможные некорректные подходы к математическому моделированию, уточнение математических моделей и т.д.

1. Сущность математического моделирования

Технические, экологические, экономические, биологические, социальные и иные системы, изучаемые современной наукой, всё чаще не поддаются исследованию (в нужной полноте и точности) обычными теоретическими методами. Прямой натурный эксперимент над ними долог, дорог, часто либо опасен, либо попросту невозможен, так как многие из этих систем существуют в «единственном экземпляре» либо принадлежат микро- или макромиру и не позволяют с ними манипулировать. Цена ошибок и просчетов в обращении со многими системами недопустимо высока. Поэтому математическое (шире — информационное) моделирование является неизбежной составляющей научно-технического прогресса. Сама постановка вопроса о математическом моделировании какого-либо объекта порождает четкий план действий. Его можно условно разбить на три этапа: модель — алгоритм — программа.

На *первом этапе* выбирается (или строится) «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д. Математическая модель (или ее фрагменты) исследуется теоретическими методами, что позволяет получить важные предварительные знания об объекте.

Второй этап — выбор (или разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью. Вычислительные алгоритмы должны не искажать основные свойства модели и, следовательно, исходного объекта, быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых компьютеров.

На *третьем этапе* создаются программы, «переводящие» модель и алгоритм на доступный компьютеру язык. К ним также предъявляются требования экономичности и адаптивности. Их можно назвать «электронным» эквивалентом изучаемого объекта, уже пригодным для непосредственного испытания на «экспериментальной установке» — компьютере.

Создав триаду «модель—алгоритм—программа», исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в «пробных» вычислительных экспериментах. После того как адекватность (достаточное соответствие) триады исходному объекту удостоверена, с моделью проводятся разнообразные и подробные «опыты», дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта. Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением, по мере необходимости, всех звеньев триады.

Выделим ряд тем, являющихся ключевыми для развития и применения методологии математического моделирования. К ним относятся:

вопросы идеализации и упрощения изучаемого объекта и формулировка соответствующих предположений;

применение как строгих процедур (фундаментальные законы, вариационные принципы), так и метода аналогий и других подходов к построению математических моделей (в том числе и трудноформализуемых);

методы качественного исследования математических моделей, в особенности нелинейных;

построение эффективных вычислительных алгоритмов, реализующих модели.

Виды уравнений и систем уравнений, используемых в непрерывных математических моделях

Чисто функциональные; алгебраические, обыкновенные дифференциальные; обыкновенные функционально-дифференциальные, в том числе уравнения с запаздыванием; уравнения в частных производных; интегральные (первого и второго рода), интегро-дифференциальные, сингулярно-интегральные.

Вместе с системами уравнений математические модели содержат какие-то дополнительные условия и ограничения на классы неизвестных функций, функционалов, операторов, в том числе начальные, граничные, распределенные условия, граничные условия для аналитических функций, комбинации этих условий, ограничения в виде систем уравнений и неравенств и многие другие.

Математическое моделирование – это основной метод решения задач прикладной математики, в какой-то степени, это и есть прикладная математика. В ММ на стадии исследования модели активно используется чистая математика с ее строго логическим, «дедуктивным» методом доказательства утверждений и выводом формул. Однако она (чистая математика) не является главной героиней исследования модели. Действительно,

1. Приближенные и (или) инженерные подходы плюс численные методы, как правило, оказываются более эффективными для получения конкретных результатов, т.к. не связаны «веригами» математической строгости.
2. После введения в процессе моделирования ряда упрощающих предположений и приближений настаивать на точном решении полученной задачи по меньшей мере странно.

С другой стороны, здесь таится опасность получения ошибочных с точки зрения целевого использования результатов, поэтому необходимо, применяя приближенные методы (во многих случаях это продолжение упрощения модели), неутомимо проверять их натурными (если возможно) и вычислительными экспериментами, сравнением с уже решенными, в том числе аналитическими точными методами, похожими задачами, и здравым смыслом тоже.

2. Общие принципы построения математических моделей

Процесс построения математических моделей может быть условно разбит на следующие этапы.

1. Конструирование модели начинается со словесно-смыслового описания объекта или явления, сведений общего характера о природе объекта, целях его исследования.

2. Создание (описание) *физической модели*. На этой стадии вводятся упрощающие предположения о физических свойствах модели. Например, *механические свойства*: невесомость (стержень, нить), однородность материала (одинаковость его свойств во всех точках), сплошность (отсутствие пор, микротрещин, локальных пустот), изотропия (независимость свойств материала от направлений). Геометрические характеристики (толстый слой вещества, тонкая прослойка из другого материала, тонкостенная оболочка). *Физические свойства*: прямолинейное распространение световых лучей, отсутствие внешних воздействий на объект, и т. д.

По возможности идеализирующие предположения записываются в математической форме (например, в виде уравнений, неравенств, включений), с тем чтобы их справедливость поддавалась количественному контролю.

3. Следующий этап – завершение идеализации объекта. Отбрасываются все факторы и эффекты, которые представляются не самыми существенными для его поведения. Мало изменяющиеся величины полаются постоянными, зависимости, мало отличающиеся от линейных, считаются линейными. Какие-то величины, в силу их малости по сравнению с другими, обнуляются.

4. Выбирается физический (биологический, социальный и т.д.) закон, с (желательно) точной математической формулировкой, вариационный принцип, аналогия и т. п., которому подчиняется объект. От выбора соответствующего закона зависит уровень адекватности модели: например, замена в математической модели закона сохранения механической энергии на закон сохранения количества движения может дать более точные результаты (см. п. 4.1 и п. 10.1 этого пособия). Выбранные законы и зависимости в *непрерывных моделях* записываются в виде функциональных, обыкновенных дифференциальных, интегральных, обыкновенных функционально-дифференциальных, интегрально-дифференциальных уравнений и систем уравнений, уравнений и систем в частных производных и всевозможных комбинаций таких уравнений т.д.

5. Завершает формулировку модели ее «оснащение», т.е. некоторые дополнительные условия. Например, необходимо задать сведения о начальном состоянии объекта (например, скорость ракеты и ее массу в момент $t = 0$) или иные его характеристики, без знания которых невозможно *однозначно* определить поведение объекта. Они имеют форму начальных, граничных, распределенных и т.п. условий для неизвестных функций. Формулируется цель исследования модели (найти закон преломления света, понять количественные

закономерности изменения популяции, определить требования к конструкции ракеты, запускающей спутник, и т. д.).

6. Построенная модель изучается всеми доступными исследователю аналитическими, приближенными и численными методами, в том числе со взаимной проверкой различных подходов. Большинство моделей не поддаются чисто теоретическому анализу, и поэтому необходимо широко использовать вычислительные методы. Это обстоятельство особенно важно при изучении нелинейных объектов, так как их качественное поведение заранее, как правило, неизвестно.

7. В результате исследования модели не только достигается поставленная цель, но и должна быть установлена всеми возможными способами (сравнением с практикой и натурными экспериментами, проведением большого количества вычислительных экспериментов, сравнением с изученными частными случаями, сопоставлением с другими подходами) ее адекватность — соответствие объекту и сформулированным предположениям. Неадекватная модель может дать результат, сколь угодно отличающийся от истинного, и должна быть либо отброшена, либо соответствующим образом модифицирована.

3. Особенности исследования математических моделей

Рассмотрим важнейший этап 6 в математическом моделировании – исследование ММ. В настоящее время и вообще со второй полвины XX века общепринято, что «задача считается решенной только в том случае, когда имеется эффективный метод, дающий требуемый результат с достаточной точностью за приемлемый отрезок времени» [1]. Основной водораздел между чистой и прикладной математикой, между теорией и математическим моделированием лежит в характере применяемой логики. Логика прикладной математики имеет некоторые стихийно установившиеся черты – способы доказательств, критерии достоверности и т. д, и не может ограничиться дедуктивным методом. Критерии чистой математики нередко оказываются ненужными или вообще не работают.

Рассуждения, неприемлемые сточки зрения чистой математики, но способные при их разумном применении приводить к правильным результатам, называются *рациональными* [3]. Они (под названием *правдоподобные рассуждения*) активно используют и в чистой математике [10], но не на стадии доказательства, а в процессе поиска решения задачи. К рациональным рассуждениям относятся *рациональные определения, утверждения, доказательства, принципы*. Например, утверждение:

«Чем тоньше и сложнее метод, тем хуже он может повести себя в случае осложнений с объектом»,

является рациональным принципом. Рациональными являются определения, относящиеся к нефомальным объектам, например, *оптимальная* система или *эффективная* система.

Типы рациональных рассуждений

1. *Использование формулировок, включающих неточно определенные понятия.*
2. *Применение утверждений, справедливых во многих реальных случаях, хотя и допускающих искусственно построенные контрпримеры.*

Нередко эти «реальные случаи» можно формализовать. Например, важнейшее утверждение о равенстве смешанных частных производных, которое лежит в основе многих теорем и методов математического анализа и приложений, гарантировано имеет место, только если эти производные непрерывны; иначе есть контрпримеры. Непрерывность функции и есть часто встречающийся «реальный случай».

3. *Уточнение в ходе исследования.*

В ходе прикладного исследования можно изменять и уточнять задачу, возникшую на основе ММ, и собственно ММ.

Нередко применяется в качестве «модельного» допущения предположение о некоторых свойствах или характере решения, *рабочая гипотеза*. Например, что решение обладает некоторыми свойствами симметрии в силу того, что такими свойствами обладают исходные данные, или так получается при решении аналитическими методами более простых аналогичных задач. Рабочей гипотезой может быть то, что в исследуемом процессе являются инвариантами некоторые величины, например, частота, или решение можно представить в виде ряда какого-то вида. Однако рабочая гипотеза может оказаться неверной даже в «очевидных» случаях.

Пример. При сжатии стержня по антисимметричной схеме [3, с. 80] критическое состояние, естественно, тоже антисимметрично. Однако это неверно: начиная с некоторого момента антисимметричное состояние становится неустойчивым. Этот момент и оказывается критическим состоянием стержня.

4. *Рассуждения на основе аналогий и натурных экспериментов.*

В [10, с. 255] рассматривается рациональное утверждение: «Предположение оказывается более правдоподобным, когда оказывается истинным аналогичное предположение». В чистой математике аналогии могут только способствовать открытию, но не служить доказательством. В математическом моделировании высокая степень достоверности практически равносильна полной, и разумная аналогия, подкрепленная другими рациональными соображениями, может считаться «доказательством». В частности, часто удается распространить утверждения с задач меньшей размерности на задачи большей размерности.

Однако представляет опасность сделать ошибку при *экстраполяции* зависимости, особенно при приближении к крайнему значению. Так, в большом количестве работ по сварным конструкциям, основанных на натурных экспериментах, делался ошибочный вывод, что при уменьшении толщины прослойки из менее прочного материала прочность содержащего её соединения становится равной прочности образца без прослойки, т.е. тонкая прослойка не снижет прочности. Ошибка происходила из-за того, что для не маленьких толщин зависимость прочности от толщины прослойки имела характер возрастающей выпуклой вниз функции; однако с уменьшением толщины характер этой зависимости менялся, но экспериментально это было трудно установить [5].

5. *«Доказательство», основанное на рассмотрении частных случаев.*

Другими словами, *индукция* – переход от частного к общему. Часто встречающийся случай – интерполяция зависимости узловых точек на промежутки между ними. На эту тему имеется обширная литература. Применяются методы интерполяции различными полиномами, сплайнами, приближения методом наименьших квадратов и методом наименьших модулей, и т.п.

Если задача содержит параметры, то можно исследовать ее при их конкретных значениях.

Например, нам хочется убедиться, что мы правильно помним формулу Герона:

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}. \qquad (3.1)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

- Вырожденный треугольник, у которого $a+b=c$. Тогда $p-c=a+b-(a+b)=0$, поэтому $S_\Delta=0$, как и должно быть.
- Правильный треугольник. Тогда $p=\dfrac{3a}{2}$, $S_\Delta=\sqrt{\dfrac{3a}{2}\dfrac{a}{2}\dfrac{a}{2}\dfrac{a}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{4}$,

что совпадает с известной формулой.

- Прямоугольный треугольник, у которого $a^2+b^2=c^2$. Тогда

$$S_\Delta=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b)^2-c^2}{4}\cdot\frac{c^2-(a+b)^2}{4}}=\frac{\sqrt{2ab\cdot 2ab}}{4}=\frac{ab}{2}.$$

Опять получен верный результат. Теперь уже нет сомнений в верности (3.1).

6. *Использование результатов приближенного решения при отсутствии строго доказанной ошибки вычислений.*

Отсутствие дедуктивно полученной оценки ошибки вычислений обычно не вызывает беспокойства. Контроль точности можно провести на рациональном уровне с помощью изменения параметров метода (например, шага в методе сеток) или изменения самого метода (в методе Рунге – Кутты изменить порядок). Можно выполнить расчет контрольного примера с известным решением.

7. *Применение вычислительных методов, сходимость которых строго не доказана.*

При исследовании сложных систем (например, в гидро- и газодинамике) это – обычное явление. Бывает, удается доказать сходимость метода, но теоретически полученная сходимость не имеет ничего общего с реальностью. Например, для достижения нужной точности по теории требуется около тысячи итераций, а в реальности хватает трех-четырех. С развитием вычислительной техники важнее становится скорость сходимости: если после длительной работы мощного компьютера результат не получен, то следует считать метод не сходящимся, и искать другой.

8. *Использование решения задачи, когда не доказаны теоремы о существовании и количестве решений.*

Это бывает сплошь и рядом при решении сложных уравнений и систем. Если метод «хорошо себя ведет» на модельных более простых задачах, то есть надежда, что он работает правильно. Конечно, если вычисления идут слишком долго, то это подозрительно. Проверить, что метод сошелся к правильному решению, можно, например, изменив параметры метода.

4. Фундаментальные законы природы как средство построения математических моделей

Один из наиболее распространенных методов построения моделей состоит в применении фундаментальных законов природы к конкретной ситуации. Эти законы общепризнаны, многократно подтверждены опытом, служат основой множества научно-технических достижений и могут, в значительной степени, быть гарантией *соответствия объекта и его модели*, а это один из центральных вопросов в математическом моделировании.

4.1. Закон сохранения энергии. Экспериментальное вычисление скорости пули

Рассмотрим ***закон сохранения энергии***. Этот закон известен почти двести лет и занимает, пожалуй, наиболее почетное место среди великих законов природы**. В изолированной системе энергия может только превращаться из одной формы в другую, но ее количество остается постоянным.**

Его частный случай: ***закон сохранения механической энергии***, – имеет вид:

полная механическая энергия

$$W = W_k + W_p = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

в изолированной системе не меняется: $W = const$.

Рассмотрим в качестве примера экспериментальное вычисление скорости пули. Полагаясь на закон сохранения энергии, эксперт по баллистике, желающий быстро определить скорость револьверной пули и не имеющий поблизости специальной лаборатории, может воспользоваться относительно простым устройством типа маятника – груза, подвешенного на легком жестком и свободно вращающемся стержне. Пуля, застрявшая в грузе, сообщит системе «пуля – груз» свою кинетическую энергию, которая в момент наибольшего отклонения стержня от вертикали полностью перейдет в потенциальную энергию системы, т.к. в верхней точке траектории система «пуля – груз» неподвижна. Эти трансформации описываются цепочкой равенств

$$\frac{mv^2}{2} = \left(M + m\right)\frac{V^2}{2} = \left(M + m\right) g\, l \left(1 - \cos\alpha\right) \tag{4.1}$$

Здесь $m\,v^2/2$ – кинетическая энергия пули массы m, имеющей скорость v, M – масса груза, V – скорость системы «пуля – груз» сразу после столкновения, g – ускорение свободного падения, l – длина стержня, α – угол наибольшего отклонения стержня. Искомая скорость определяется формулой, которая будет вполне точной, если не учитываемые нами потери энергии на разогрев пули и груза, на преодоление сопротивления воздуха, разгон стержня и т. д. невелики.

$$v=\sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos\alpha)}{m}} \qquad (4.2)$$

В действительности получающийся результат не вполне точен. Процессы, происходящие при «слипании» пули и маятника, не являются чисто механическими. Часть механической энергии переходит в тепловую. Поэтому примененный для вычисления величины V закон сохранения механической энергии несправедлив: сохраняется полная, а не механическая энергия системы. Он дает лишь *нижнюю границу* для оценки скорости пули. Для уточнения решения этой задачи надо воспользоваться *законом сохранения импульса* (см. раздел 10.1. Некорректные математические модели. Экспериментальное вычисление скорости пули).

4.2. Закон сохранения массы. Распад радиоактивного вещества

Наряду с общими, основу ММ часто составляют специальные законы, относящиеся к данному явлению.

Рассмотрим ***закон сохранения массы***. Именно использованием закона сохранения массы руководствуется школьник, решающий задачу о заполнении бассейна водой, втекающей и вытекающей через несколько труб. Математической моделью служит алгебраическое уравнение, в котором приравнено количество воды, втекающей в бассейн, количеству воды, вытекающей из бассейна, за единицу времени.

Пример 1. Через первую трубу бассейн наполняется за 1 час, через вторую – за 4 часа, через 3-ю вода вытекает из бассейна за 2 часа. За какое время вытечет вся вода из бассейна отдельно через четвертую трубу, если уровень воды в бассейне остается постоянным?

Решение. Примем объем бассейна за 1. Пусть t -искомая величина. За единицу времени в бассейн втекает $1/1+1/4$, а вытекает $1/2+1/t$. Приравнивая эти величины (*закон сохранения массы*), получим уравнение

$$1/1+1/4 = 1/2+1/t$$

(*математическая модель*). Решая его, находим: $t=4/3$ часа.

Пример 2. Рассмотрим более сложную задачу, связанную с распадом радиоактивного вещества. Пусть $N(t)$ – количество атомов данного радиоактивного тела в момент времени t. Это количество постоянно уменьшается в теле, но атомы не пропадают (*закон сохранения массы*), а распадаются, и продукты распада покидают границы тела.

Закон распада радиоактивного вещества:

скорость распада (число атомов, распадающихся в единицу времени) пропорционально общему числу атомов радиоактивного вещества.

В соответствии с этим законом, количество распавшегося радиоактивного вещества (уменьшения $N(t)$) за промежуток времени dt равно $dN(t)$. В силу приведенного закона

$$\frac{dN(t)}{dt}=-\alpha N(t). \tag{4.3}$$

Здесь $\alpha>0$ – коэффициент распада. В начальный момент $t=0$ пусть $N=N_0$. Это условие вместе с уравнением является математической моделью распада радиоактивного вещества. Решая уравнение, получим:

$$\frac{dN(t)}{N(t)}=-\alpha dt,\ \ln\left|N(t)\right|=-\alpha t+C,\ N(t)=C_1e^{-\alpha t}.$$

Подставляя сюда $t=0$ и пользуясь начальным условием $N=N_0$, получим $C_1=N_0$ и окончательно,

$$N(t) = N_0 e^{-\alpha t}.$$

Пусть t_0, $t_0 > 0$ – время, за которое распадается половина вещества («период полураспада»). Тогда из последней формулы следует, что

$$N_0/2 = N(t_0) = N_0 e^{-\alpha t_0},$$

откуда $\alpha = \ln 2/t_0$ и $N(t) = N_0 2^{-t/t_0}$.

Пример 3 (продолжение примера 2)

Пусть, например, имеется небольшое количество радиоактивного вещества I (урана), окруженного толстым слоем «обычного» материала II (свинца), – ситуация типичная либо при хранении делящихся материалов, либо при их использовании в энергетике. Под словом «небольшой» подразумевается упрощающее обстоятельство, а именно то, что все продукты распада, не испытывая столкновений с атомами вещества I, беспрепятственно покидают область I. Другими словами, длина свободного пробега продуктов распада l_1 в первом веществе значительно больше характерных размеров самого материала L_1, т.е. $l_1 \gg L_1$. Слова «толстый слой» означают, что в согласии с целями хранения продукты деления полностью поглощаются в области II. Это гарантируется при выполнении противоположного условия $l_2 \ll L_2$, где l_2– длина пробега продуктов распада во втором веществе, L_2 — его характерный размер. Итак,

$$l_1 \gg L_1, \quad l_2 \ll L_2. \tag{4.4}$$

Все, что вылетает из области I, поглощается в области II, и *суммарная масса обоих веществ со временем не меняется*. Это и есть *закон сохранения массы*, примененный к данной ситуации. Если в начальный момент времени $t = 0$ массы веществ были равны $m_1(0)$ и $m_2(0)$, то в любой момент времени справедливо:

$$m_1(t) + m_2(t) = const = m_1(0) + m_2(0). \tag{4.5}$$

Система (4.3) – (4.5) является математической моделью данного процесса. Заметим, что при $t \to \infty$

$$m_1(t) \to 0, \quad m_2(t) \to m_1(0) + m_2(0).$$

Действительно,

$$m_2(t) = m_1(0) + m_2(0) - m_1(t) = m_1(0)\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + m_2(0).$$

Заметим, что в результате столкновений урана со свинцом в зоне II выделяется некоторой количество энергии, т.е. какая-то масса переходит в энергию. Но величина этого количества энергии ничтожно мала в силу формулы Эйнштейна $E = mc^2$, поэтому этим обстоятельством в данном случае можно пренебречь.

4.3. Закон сохранения количества движения. Принцип реактивного движения

Один из наиболее распространенных методов построения математических моделей состоит в применении фундаментальных законов природы к конкретной ситуации. Эти законы общепризнаны, многократно подтверждены опытом, служат основой множества научно-технических достижений и могут, в какой-то степени, быть гарантией соответствия объекта и его модели, а это один из центральных вопросов в математическом моделировании.

Закон сохранения импульса:

полный импульс системы (т.е. векторная сумма импульсов всех точек), не испытывающей действия внешних сил, сохраняется.

Учитывая ***второй закон Ньютона***:

импульс силы, действующей на материальную точку, равен её количеству движения:

$$\int_{t_0}^{t} F(\tau)\,d\tau = m(t)v(t),$$

закон сохранения импульса можно записать как закон сохранения количества движения:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t)v_i(t) = const.$$

Принцип реактивного движения, основанный на законе сохранения импульса, положен в основу многих замечательных технических устройств, например, ракеты. Простейшая математическая модель движения ракеты получается из закона сохранения импульса в пренебрежении сопротивлением воздуха, гравитацией и другими силами, исключая, конечно, тягу реактивных двигателей.

Пусть продукты сгорания ракетного топлива покидают расположенные в кормовой части выхлопные сопла со скоростью u (для современных топлив величина и равна 3…5 км/с). За малый промежуток времени dt между моментами t и $t + dt$ часть топлива выгорела, и общая масса ракеты (собственно ракета плюс топливо) m изменилась на величину dm. Изменился (увеличился) также импульс ракеты, однако суммарный импульс системы «ракета плюс продукты сгорания» остался тем же, что и в момент t, т.е.

$$m(t)v(t) = m(t+dt)v(t+dt) - dm\big(v(t) - u\big),$$

где $v(t)$ – скорость ракеты (скорости берутся относительно Земли). Первый член в правой части этого равенства – импульс ракеты в момент $t + dt$, второй – импульс, переданный истекающим газом за время dt. Отсюда

$$d(mv) = dm\cdot(v-u), \quad vdm + mdv = vdm - udm, \quad mdv = -udm.$$

Дифференцируя обе части последнего равенства по t, получим

$$m\frac{dv}{dt}=-u\frac{dm}{dt}.$$

Здесь правая часть – сила тяги ракетных двигателей.
Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{dv}{dt}=-u\frac{d(\ln m)}{dt}$$

и, интегрируя, получим:

$$v(t)=u\ln\left(\frac{C}{m(t)}\right). \qquad (4.6)$$

Пусть в некоторый момент времени скорость ракеты равна v_0 , а полная масса ракеты m_0. Подставляя эти значения в формулу (4.6), получим:

$$v_0=u\ln\left(\frac{C}{m_0}\right).$$

Вычитая из формулы (1) последнюю формулу, приходим к формуле:

$$v(t)=v_0+u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right).$$

Пусть m_u и m_s – соответственно полезная масса (выводимая на орбиту) и структурная масса (собственно ракета). Тогда в момент t^*, когда выгорает всё топливо, и ракета достигает своей максимальной скорости, последняя формула приобретает вид (формула Циолковского):

$$v(t^*)=v_0+u\ln\left(\frac{m_0}{m_u+m_s}\right).$$

Пусть

$$\lambda=\frac{m_s}{m_0-m_u}.$$

Практически реальные значения:

$$\lambda=0{,}1;\ u=3km/c.$$

Даже при отсутствии груза ($m_u=0$) при начальной скорости v_0=0 получаем:

$$v(t^*)=u\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)=3\ln10\approx6{,}908\,km/c,$$

т.е. первая космическая скорость 7,8 km/c при таких параметрах недостижима.

Одной из актуальных задач современной космонавтики является достижение первой космической скорости одноступенчатой ракетой. В соответствии с приведенными формулами максимальная скорость ракеты *линейно зависит* от скорости истекания из сопла продуктов сгорания ракетного топлива. Следовательно, есть два пути:

1) совершенствование ракетного топлива;

2) совершенствование конструкции сопла и камеры сгорания.

В настоящий момент предлагаются как перспективные варианты:

1) в качестве топлива кислородно-водородная смесь (кислород и водород находятся в ракете в жидком состоянии и впрыскиваются в камеру сгорания, где в результате взрыва высвобождается большое количество энергии);

2) конструкция сопла не с круговым, а с кольцевым сечением, при котором можно за счет уменьшения площади сечения сопла увеличить скорость истекания из него продуктов сгорания.

4.4. Законы Ньютона и Гука. Движение шарика, присоединенного к пружине

Продемонстрируем этот подход на примере модели движения шарика, присоединенного к пружине, с жестко закрепленным концом. Пусть r – координата шарика вдоль оси пружины, лежащей на горизонтальной плоскости, и направление движения шарика совпадает с ее осью. Тогда, по второму закону Ньютона,

$$F = ma = m\frac{d^2r}{dt^2}, \tag{4.7}$$

где m – масса шарика, a – его ускорение. Для получения математической модели движения шарика – обыкновенного дифференциального уравнения (вместе с начальными условиями) введем «модельные» допущения и упрощающие условия. Будем считать плоскость идеально гладкой (т.е. движение происходит без трения), пренебрежем также сопротивлением воздуха и примем во внимание то, что вес шарика уравновешивается реакцией плоскости. Единственная сила, действующая на шарик в направлении оси r, очевидно, сила упругости пружины. Определим ее, используя

закон Гука*, гласящий, что*

для растяжения (сжатия) пружины необходимо приложить силу

$$F = -kr\,, \tag{4.8}$$

где коэффициент $k > 0$ характеризует упругие свойства пружины, а r – величину ее растяжения или сжатия относительно нейтрального, ненагруженного положения $r = 0$.

На основании (4.7) и (4.8) уравнение движения шарика принимает вид (уравнение элементарного осциллятора)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -kr, \quad k > 0. \tag{4.9}$$

Кроме того, имеют место уравнения начального состояния объекта, т. е. условия:

$$r\big|_{t=0} = r_0 \text{ и } v\big|_{t=0} = v_0 \tag{4.10}$$

Здесь $v(t)$ – скорость шарика.

Дифференциальное уравнение (4.9) вместе с условиями (4.10) составляет математическую модель движения шарика, присоединенного к пружине.

Следующий этап – исследование математической модели и получение закона функционирования объекта в зависимости от имеющихся параметров. Уравнение (3) описывает гармонические колебания шарика и имеет общее решение

$$r = A\sin\omega t + B\cos\omega t, \qquad (4.11)$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$ – собственная частота колебаний системы «пружина – шарик». Оно находится стандартными методами решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Значения A и B легко определяются из условий (4.10). Действительно, дифференцируя (4.11), получим:

$$\dot{r} = v = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t. \qquad (4.12)$$

Подставив $t = 0$ в уравнения (4.11) и (4.12) и использовав (4.10), получим:

$$B = r_0, \quad A\omega = v.$$

Окончательно, уравнение движения имеет вид:

$$r = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + r_0\cos\omega t, \quad \omega = \sqrt{k/m}.$$

Очевидно, $r(t) \equiv 0$ при $r_0 = v_0 = 0$. Это следует и из полученного уравнения.

5. Вариационные принципы в построении математических моделей

Один из общих подходов к построению моделей состоит в применении так называемых вариационных принципов. К ним относятся принцип Ферма, принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона) и др. Они представляют собой весьма общие утверждения о рассматриваемом объекте (системе, явлении, процессе) и гласят, что из всех возможных вариантов его поведения (движения, эволюции) выбираются лишь те, которые удовлетворяют условию, когда некоторая связанная с объектом величина достигает экстремального значения. В этом случае математической моделью являются уравнения и другие соотношения, полученные на основе экстремального принципа.

5.1. Принцип преломления света Ферма. Траектория луча света

Принцип Ферма:
луч света движется по траектории, обеспечивающей быстрейшее попадание сигнала из одной точки в другую.

Пример 1. Пусть луч света выходит из точки A и, отразившись от плоской поверхности, попадает в некоторую точку B. Покажем на основании принципа Ферма, что *угол падения равен углу отражения*.

Представим затраченное время как функцию величины α – угла между отражающей плоскостью и отрезком пути от точки А до плоскости:

$$t(\alpha)=\frac{a}{v\sin\alpha}+\frac{b}{v\sin\beta(\alpha)}.$$

Здесь β – угол между отражающей плоскостью и отрезком пути от точки В до плоскости, a и b – расстояния от точек А и В до плоскости, v – скорость света. Условие экстремальности $t(\alpha)$ по аргументу α означает:

$$\frac{dt(\alpha)}{d\alpha}=0.$$

В данном случае

$$\frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{b\cos\beta(\alpha)}{\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha}=0. \qquad (5.1)$$

Для любых значений α справедливо равенство

$$c=\frac{a}{\mathrm{tg}\alpha}+\frac{b}{\mathrm{tg}\beta(\alpha)},$$

где c – расстояние между проекциями точек А и В на прямую (одинаковое для всех траекторий). Дифференцируя его, получаем соотношение

$$\frac{a}{\sin^2\alpha}+\frac{b}{\sin^2\beta(\alpha)}\frac{d\beta}{d\alpha}=0, \qquad (5.2)$$

которое вместе с условием минимальности (5.1) означает

$$\cos\alpha = \cos\beta(\alpha) \qquad (5.3)$$

т. е. равенство углов α и β, что и требовалось. Условие минимальных затрат времени привело к выбору соответствующей траектории по правилу «угол падения равен углу отражения». Такому закону подчиняется и ход светового луча, попадающего на отражающую поверхность.

Верно и обратное: если угол падения луча равен углу отражения (формула (5.3)), то луч проходит путь из точки A в точку B за наименьшее время. Действительно, умножая первое слагаемое (5.2) на левую часть (5.3), а второе слагаемое – на правую часть (5.3), получим (5.1), т.е. условие экстремальности времени.

Рассмотрим задачу посложней.

Пример 2. Пусть луч света выходит из точки A и, пройдя плоскую границу между средами, попадает в некоторую точку B. Пусть скорость света в среде со стороны A равна v_a, со стороны B равна v_b. Тогда вместо (5.3) получится:

$$v_b \cos\alpha = v_a \cos\beta(\alpha), \qquad (5.4)$$

– закон преломления света при переходе через границу сред с разной плотностью. Пусть, например, $v_a / v_b = \sqrt{2}$. Пусть $\alpha = \pi/4$, тогда $\beta = \pi/3$. При переходе из среды с большей скоростью света в среду с меньшей скоростью света угол наклона к границе увеличивается.

Определение. Отношение $n = n_{a;b} = v_a / v_b$ скорости света в среде, из которой луч выходит, в среду, в которую луч входит, называется *коэффициентом преломления* света для данных сред.

С использованием этого обозначения формула (5.4) можно записать в виде:

$$\cos\beta(\alpha) = \frac{1}{n_{a;b}} \cos\alpha \qquad (5.5)$$

Проанализируем формулу (5.5). $n = n_{a;b}$ – это параметр изучаемого объекта, α – данное условие. Пусть $\dfrac{\cos\alpha}{n} > 1$. Тогда формула (5.5) противоречива. Не значит ли это, что принцип Ферма неверен? Нет. Формулы (5.4) и (5.5) получены в предположении, что луч света пересекает контактную границу и переходит из одной среды в другую. Мы, элементарно анализируя полученный результат, выходим на «новое» физическое явление:

если $\cos\alpha \geq n$, *то луч света не выходит из исходной среды, а, достигнув контактной поверхности, движется по ней, т.е.* $\beta(\alpha)$*=0.*

Поэтому формулы (5.4) и (5.5) следует уточнить:

$$\begin{cases} \cos\beta(\alpha) = \dfrac{1}{n}\cos\alpha, \ \cos\alpha \leq n, \\ \beta(\alpha) = 0, \quad \cos\alpha \geq n. \end{cases}$$

6. Применение аналогий при построении математических моделей

В огромном числе случаев при попытке построить модель какого-либо объекта либо не удается *обоснованно* указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым он подчиняется, либо, с точки зрения наших сегодняшних знаний, вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку. Одним из плодотворных подходов к такого рода объектам является или замена изучаемого явления на какую-то аналогию, или использование аналогий с уже изученными явлениями.

6.1. Вытекание жидкости из сосуда

Рассмотрим явление вытекания жидкости из цилиндрического сосуда с маленьким отверстием в его дне. Как заметил Торричелли, если уровень воды в сосуде равен H, то вода вытекает с той же скоростью v, с какой она упала бы с высоты H. Действительно, если вода сверху уходит, а снизу столько же (*закон сохранения массы!*) появляется, то можно считать, что это та же самая вода, т.е. что она «упала» с высоты H. Используя *закон сохранения механической энергии*

$$W = W_k + W_p = \frac{mv^2}{2} + mgh = \mathrm{const},$$

можно заметить, что тело, падающее с высоты H, получает скорость

$$v = \sqrt{2gH}\,. \tag{6.1}$$

Действительно, в начальный момент $h = H,\ v = 0$, а в конечный $h = 0$. Отсюда

$$mgh = mv^2/2, \tag{6.2}$$

т.е. в конечный момент получается формула (6.1). Формула (6.1) как формула для вычисления скорости вытекающей из малого отверстия жидкости называется ***законом Торричелли***. Заметим, что закона сохранения механической энергии в его время еще не существовало, и формула Торричелли получена исключительно по аналогии с падением жидкости с высоты.

Рассмотрим математическую модель движения уровня жидкости при вытекании ее из цилиндрического сосуда через малое отверстие. Введем систему координат. Пусть единственная ось OH направлена вверх, а начало координат находится на поверхности жидкости в начальный момент. Пусть площадь сечения сосуда равна S, площадь отверстие равна s, уровень воды в начальный момент равен H_0, скорость опускания уровня жидкости $\dot{H} = dH/dt$. Пусть за время dt капля воды в вытекающей струйке пройдет расстояние dl. Тогда за время dt объем вытекающей воды равен:

$$dV = sdl = s\frac{dl}{dt}dt = sv\,dt\,.$$

Объем воды в сосуде за время dt понизится на

$$dV = -SdH = -S\frac{dH}{dt}dt = -S\dot{H}\,dt\,.$$

Приравнивая эти величины (*закон сохранения массы*!), получим: $S\dot{H} = -sv$. Подставив сюда выражение v из (6.1), получим ММ движения уровня жидкости при вытекании ее из цилиндрического сосуда через малое отверстие:

$$\dot{H} = -\frac{s}{S}\sqrt{2gH}\,. \qquad (6.3)$$

ММ состоит из этого уравнения и начального условия:

$$H\big|_{t=0} = H_0\,.$$

Приступим к исследования полученной модели. Разделяя переменные в (6.3) и интегрируя, получим: $2\sqrt{H} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\,t + C$. Из начального условия находим: $C = 2\sqrt{H_0}$. Отсюда:

$$H = \left(\sqrt{H_0} - \frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t\right)^2. \qquad (6.4)$$

Время вытекания t^* определяется моментом, когда $H = 0$. Поэтому из (6.3):

$$t^* = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H_0}{g}}\,. \qquad (6.5)$$

Дифференцируя (6.4), получим: $\left|\dot{H}\right| = 2\frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}\left(\sqrt{H_0} - \frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t\right)t$. Отсюда видно, что уровень воды опускается чем дальше, тем медленнее, но за конечное время t^* полностью вытекает.

Полученные теоретические выводы были проверены натурными экспериментами. Оказалось, что *время вытекания (6.4) почти в 2 раза меньше реального*. Дело в том, что сечение струи заметно меньше толщины отверстия. Это объясняется гидродинамическими явлениями в окрестности отверстия: там жидкость испытывает не только силу тяжести, но и сжимающие силы вокруг отверстия, что заставляет струю двигаться быстрей и, в силу несжимаемости жидкости, уменьшить толщину струи. Уже это обстоятельство говорит о том, предложенная модель далека от совершенства.

Еще важнее вопрос: а если отверстие не «малое»? И что значит «малое»? Отношение площадей S и s равно отношению скоростей v и $\left|\dot{H}\right|$ (закон сохранения массы), т.е. как уже было замечено,

$$\dot{H} = \frac{vs}{S}. \tag{6.6}$$

Если отверстие «малое», то «мала» скорость $\dot{H}$ движения жидкости под действием силы тяжести, и *можно не учитывать кинетическую энергию жидкости внутри сосуда*. Отсюда – простота формулы (6.1).

Обсудим эти вопросы подробнее в разделе 9 «Уточнение математической модели». Пока же можно усовершенствовать рассуждение, из которого получена формула Торричелли (6.1), уточнив формулу (6.2). Будем считать, в отличие от (6.2), что кинетическая энергия вытекающей воды равна *полной* механической энергии верхнего слоя, т.е.

$$dm\,g\,h + dm\frac{\dot{H}^2}{2} = dm\frac{v^2}{2}, \tag{6.7}$$

где dm – масса верхнего элементарного слоя жидкости. В силу (6.6) отсюда получим:

$$g\,h + \frac{v^2 s^2}{2S^2} = \frac{v^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{s^2}{S^2}}}.$$

Если, например, $s/S = 0{,}1$, то относительная ошибка (6.1) по сравнению с этой формулой равна 0,005 (в сторону уменьшения). Следовательно, формула (6.1) производит впечатление весьма точной в том смысле, что «малым» отверстием можно считать весьма не малое, когда отношение его радиуса к радиусу цилиндра равно $\sqrt{0{,}1} \approx 0{,}316$.

Процесс, который мы здесь рассматриваем, не прост. Некоторые подробности будут обсуждаться в разделе 9.

6.2. Модель Мальтуса

Можно обнаружить некую аналогию между радиоактивным распадом и динамикой популяций, в частности изменением численности населения нашей планеты.

Рассмотрим одну из простейших моделей популяций, так называемую ***модель Мальтуса***. В ее основу положена

***гипотеза*: скорость изменения населения со временем *t* пропорциональна его текущей численности *N(t)*, умноженной на разность коэффициентов рождаемости $\alpha(t)\geq 0$ и смертности $\beta(t)\geq 0$.** В результате приходим к уравнению

$$\frac{dN(t)}{dt}=\left(\alpha(t)-\beta(t)\right)N(t),$$

похожему на уравнение радиоактивного распада и совпадающего с ним при постоянных α и β и условии $\alpha<\beta$. Интегрирование этого уравнения дает:

$$\frac{dN}{N}=\left(\alpha(t)-\beta(t)\right)dt,$$

$$N(t)=N(0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\left(\alpha(t)-\beta(t)\right)dt\right),$$

где $N(0)$ – начальная численность. При $\alpha=\beta$ численность остается постоянной, т. е. в этом случае решением уравнения является равновесная величина $N(t)=N_0$. Равновесие между рождаемостью и смертностью неустойчиво в том смысле, что даже небольшое нарушение равенства $\alpha=\beta$ приводит с течением времени ко все большему отклонению функции $N(t)$ от равновесного значения N_0. При $\alpha<\beta$ численность населения убывает и стремится к нулю при $t\to\infty$, а при $\alpha>\beta$ растет по некоторому экспоненциальному закону, обращаясь в бесконечность при $t\to\infty$. Это и послужило основанием для опасений Мальтуса о грядущем перенаселении Земли со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Задача. Определите, как себя должна вести при больших *t* величина

$$r(t)=\alpha(t)-\beta(t)>0$$

в модели Мальтуса, чтобы численность популяции оставалась ограниченной при $t\to\infty$.

Решение. Необходимым и достаточным условием ограниченности численности популяции является ограниченность при $t\to\infty$ интеграла

$$\int_{t_0}^{t}\left(\alpha(\tau)-\beta(\tau)\right)d\tau .$$

Достаточным условием ограниченности численности популяции при $t\to\infty$ является условие:

$$\left|\alpha(t)-\beta(t)\right|\le\frac{k}{t^{\mu}},\ \mu>1.$$

Действительно, в этом случае при $\mu>1$ и любых $t\ge t_0$

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t}\left(\alpha(\tau)-\beta(\tau)\right)d\tau\right)\le\exp\left(\int_{t_0}^{t}\left|\left(\alpha(\tau)-\beta(\tau)\right)\right|d\tau\right)\le$$

$$\exp\left(k\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{\tau^{\mu}}\right)=\exp\left(k\left(\frac{1}{t_0^{\mu-1}}-\frac{1}{t^{\mu-1}}\right)\right)<\infty .$$

Другим достаточным условием ограниченности численности популяции при $t\to\infty$ являются (ограниченные) функции вида:

$$\alpha(\tau)-\beta(\tau)=a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t),\quad a,\,b,\,\omega\in R,\ \omega>0.$$

7. Нелинейные математические модели

Простота рассмотренных выше моделей во многом связана с их линейностью. В математическом плане это важное понятие означает, что справедлив ***принцип суперпозиции:***
любая линейная комбинация решений (например, их сумма) также является решением задачи.

Пользуясь принципом суперпозиции, нетрудно, найдя решение в каком-либо частном случае, построить решение в более общей ситуации. Поэтому о качественных свойствах общего случая можно судить по свойствам частного – различие между двумя решениями носит лишь количественный характер. Например, увеличение в два раза скорости истечения ракетного топлива ведет также к двукратному увеличению скорости ракеты, уменьшение угла падения светового луча на отражающую поверхность означает такое же изменение угла отражения и т. д. Другими словами,

в случае линейных моделей отклик объекта на изменение каких-то условий пропорционален величине этого изменения.

Для нелинейных явлений, математические модели которых не подчиняются принципу суперпозиции, знание о поведении части объекта еще не гарантирует знания поведения всего объекта, а его отклик на изменение условий может качественно зависеть от величины этого изменения. Так, уменьшение угла падения луча света на границу раздела двух сред приводит к уменьшению угла преломления, но только до определенного предела. Если угол падения становится меньше критического, то происходит качественное изменение – свет перестает проникать через границу раздела во вторую среду, если она менее плотная, чем первая. Тем самым преломление света — пример нелинейного процесса. *Большинство реальных процессов и соответствующих им математических моделей нелинейны*. Линейные же модели отвечают весьма частным случаям и, как правило, служат лишь первым приближением к реальности.

Популяционные модели. Уточнение теории Мальтуса

Рассмотрим в качестве примера *популяционные* модели. Они сразу становятся нелинейными, если принять во внимание ограниченность доступных популяции ресурсов. При их выводе считается, что:

1) существует «равновесная» численность популяции N_p, которую может обеспечить окружающая среда;

2) скорость изменения численности популяции пропорциональна самой численности, умноженной (в отличие от модели Мальтуса) на величину ее отклонения от равновесного значения, т. е. уравнение «роста» популяции в виде:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha\left(1 - \frac{N}{N_p}\right)N, \quad \alpha > 0. \tag{7.1}$$

Член $1 - N/N_p$ в этом уравнении обеспечивает механизм «насыщения» численности – при $N < N_p$ $(N > N_p)$ скорость роста положительна (отрицательна) и стремится к нулю, если $N \to N_p$. Представляя уравнение (7.1) в виде

$$\frac{dN}{N_p - N} + \frac{dN}{N} = \alpha\, dt$$

и интегрируя, получаем:

$$-\ln\left(N_p - N\right) + \ln N = \alpha t + C .$$

Постоянная интегрирования определяется из условия:

$$N\Big|_{t=0} = N(0),$$

откуда

$$C = \ln \frac{N(0)}{N_p - N(0)} .$$

В результате находим:

$$N(t) = N_p \frac{N(0)}{N_p - N(0)} e^{\alpha t} - N(t) \frac{N(0)}{N_p - N(0)} e^{\alpha t} ,$$

или, в окончательном виде,

$$N(t) = \frac{N_p N(0) e^{\alpha t}}{N_p - N(0)\left(1 - e^{\alpha t}\right)} . \qquad (7.2)$$

Поведение функции $N = N(t)$ описывается так называемой *логистической кривой* – графиком функции (7.2).

При любом $N(0)$ численность популяции стремится к равновесному значению N_p, причем тем медленней, чем величина $N(t)$ ближе к $N(0)$. Тем самым равновесие, в отличие от случая модели Мальтуса, устойчиво. Логистическая модель более реалистично отражает динамику популяции в сравнении с моделью Мальтуса, но сама она не линейна и поэтому более сложна. Заметим, что предположения о механизмах насыщения используются при построении многих моделей в различных областях знаний.

Задача. Рассмотрите в логистической модели малые отклонения от положения равновесия, т. е. ситуацию, когда решение имеет вид $N(t) = N_p + \delta N(t)$, где $\left|\delta N(t)\right| \ll N_p$. Покажите, что для величины $\delta N(t)$ в первом приближении справедлива линейная модель типа модели Мальтуса.

Решение. Положим для удобства записи $\dfrac{\delta N(t)}{N_p} = M(t)$. Тогда уравнение (7.1) приобретает вид: $\dfrac{dM}{dt} = -\alpha M(1+M)$. Так как, по условию, $M \ll 1$, последнее уравнение можно заменить на приближенное: $\dfrac{dM}{dt} \approx -\alpha M$, откуда следует: $\dfrac{d(\delta N(t))}{dt} \approx -\alpha \cdot (\delta N(t))$, т.е. уравнение, полученное из гипотезы Мальтуса.

8. Уравнения в частных производных в математических моделях

Многие объекты и процессы характеризуются величинами, зависящими от нескольких переменных. Математическое описание явлений в этом случае достигается с использованием уравнений в частных производных (уравнений математической физики). Примерами являются многие процессы в механике твердого тела, механике жидкости и газа, тепловые процессы и процессы горения, и т.д. Краевые, граничные, начальные, распределенные и т.п. задачи для уравнений и систем уравнений в частных производных исследуются аналитически лишь в редких «классических» случаях. Обычно они допускают решения численными методами и требуют высокоскоростной современной вычислительной техники. Рассмотрим не самые сложные модели для классических задач механики, допускающие аналитическое исследование.

8.1. Волновое уравнение. Колебания упругих тел

Рассмотрим колебания, возникающие в упругом стержне под действием сил, направленных по оси стержня.

Модельные предположения. Стержень является цилиндром из однородного изотропного идеально упругого материала, т.е. выполняется закон Гука. Под действием осевой силы сечения, ортогональные оси стержня, остаются плоскими и ортогональными оси.

Свяжем стержень с одномерной системой координат Ox. В момент времени t сечение, проходящее через точку x, переместится на величину $u = u(t,x)$

Отрезок $[x_0;\ x_1]$ удлинится на величину

$$u(x_1,t) - u(x_0,t) = \frac{\partial u(\tilde{x},t)}{\partial x}\Delta x, \quad \tilde{x} \in [x_0;\ x_1].$$

Величина $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ называется *продольной деформацией* стержня в точке x.

В соответствии с ***законом Гука****, при малых деформациях осевая сила, действующая на стержень,* $g(x,t)$ *пропорциональна деформации и площади сечения стержня*. Поэтому

$$g(x,t) = E\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}S, \tag{8.1}$$

где E – модуль Юнга, коэффициент пропорциональности в законе Гука, S – площадь сечения стержня.

Выделим в стержне произвольный отрезок $\left[x_0;\,x_1\right]$. На него действуют приложенные к его концам осевые (разных знаков) силы $g\left(x_1,t\right)$ и $-g\left(x_0,t\right)$ откуда в силу (8.1):

$$g\left(x_1,t\right)-g\left(x_0,t\right)=ES\left(\frac{\partial u\left(x_1,t\right)}{\partial x}-\frac{\partial u\left(x_0,t\right)}{\partial x}\right)=$$

$$=ES\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\right)dx=ES\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2}dx. \qquad (8.2)$$

Пусть ещё имеется внешняя сила, действующая по оси стержня, непостоянная в различных точках оси. Обозначим ее плотность, т.е. отношение к единице длины стержня, через $f\left(x,t\right)$. Тогда внешняя сила, действующая на отрезке $\left[x_0;\,x_1\right]$, равна

$$S\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,t\right)dx. \qquad (8.3)$$

Произведение массы на ускорение элемента стержня равно $\rho S\,dx\dfrac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2}$, поэтому для всего $\left[x_0;\,x_1\right]$ эта величина равна

$$\int_{x_0}^{x_1}\rho S\,\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2}dx. \qquad (8.4)$$

В соответствии со ***2-м законом Ньютона***, в силу которого *сумма всех сил, действующих на тело, равна произведению массы тела (при условии ее постоянства) на ускорение*, получим, собирая выражения (8.2), (8.3) и (8.4), что для любого отрезка $\left[x_0;\,x_1\right]$ стержня имеет место равенство:

$$ES\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2}dx+S\int_{x_0}^{x_1} f\left(x,t\right)dx=\int_{x_0}^{x_1}\rho S\,\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2}dx.$$

В предположении непрерывности подынтегральных выражений, учитывая произвольность отрезка $\left[x_0;\,x_1\right]$, получим уравнение:

$$E\,\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2}+f\left(x,t\right)=\rho\,\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2}$$

Введем обозначения: $\frac{\rho}{E}=\frac{1}{c^2}, \quad \frac{1}{E}f\left(x,y\right)=F\left(x,y\right)$. Получим из предыдущего так называемое ***волновое уравнение***:

$$\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2}-F\left(x,t\right). \qquad (8.5)$$

Кроме уравнения, в математическую модель входят начальные и краевые условия. Рассмотрим, например,

задачу о свободных продольных колебаниях упругого стержня. В этом случае внешняя сила, действующая по оси стержня, отсутствует, поэтому уравнение (8.5) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2}. \qquad (8.6)$$

Предполагаем, что идеально упругий однородный стержень поддерживался некоторое время в растянутом или сжатом состоянии, и был отпущен (без толчка). Пусть конец стержня $x=0$ закреплен. Значит, $u\left(t,x\right)\big|_{x=0}=0$. Пусть другой конец $x=l$ находится в свободном состоянии. На этот конец, по условию, не действует внешняя осевая сила $g\left(l,t\right)$. Тогда по формуле (1) имеем: $\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\big|_{x=l}=0$. Следовательно, краевые (граничные) условия приобретают вид:

$$\begin{cases} u\left(t,x\right)\big|_{x=0}=0,\ t\geq 0, \\ \frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\big|_{x=l}=0,\ t\geq 0. \end{cases} \qquad (8.7)$$

Пусть в начальный момент точки стержня были смещены на величину $f\left(x\right)$, а скорость всех точек стержня равна нулю (он был отпущен без толчка). Поэтому начальные условия записываются так:

$$\begin{cases} u\left(t,x\right)\big|_{t=0}=f\left(x\right),\ x\in\left[0;l\right], \\ \frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}\big|_{t=0}=0,\ x\in\left[0;l\right]. \end{cases} \qquad (8.8)$$

Для согласования граничных и начальных условий требуется дополнительное ограничение $f\left(0\right)=0$. Система (8.6) – (8.8) является математической моделью для *задачи о свободных продольных колебаниях упругого стержня при данных условиях.*

Существуют хорошо разработанные методы аналитического (методы Даламбера и Фурье) и численного (методы сеток) решения краевых задач для таких уравнений.

Уравнение (8.6) возникает при построении математической модели малых поперечных колебаний идеально упругой идеально гибкой струны в среде, не оказывающей сопротивления движению. В этом случае $u = u(t,x)$ есть отклонение точки x струны от положения равновесия в момент времени t. Уравнение (8.6) описывает также закон колебания плоских световых и звуковых волн в идеальных средах и целый ряд других физических явлений. Таким образом, одна математическая модель может являться моделью широкого класса физических явлений.

Аналогично уравнению (4) в двумерном и трехмерном случаях можно получить уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} - F(x,y,t),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} - F(x,y,z,t)$$

которые являются математическими моделями распространения звуковых, световых и электромагнитных волн в двумерном и трехмерном пространстве, и ряда других физических явлений.

8.2. Уравнение теплопроводности

Пусть в каждой точке M некоторого тела Ω трехмерного пространства R^3 требуется найти температуру $T(M,t)$ в любой момент времени t. Пусть ω – элемент объема в теле Ω с границей $\partial\omega$.

Рассмотрим 3 закона теплофизики, относящиеся к распространению тепла в твердом теле.

1. *Количество тепла ΔQ, проходящего за малый промежуток времени Δt через поверхность $\partial\omega$, вычисляется по формуле:*

$$\Delta Q = \Delta t \oiint\limits_{\partial\omega} k \left| \frac{\partial T(M,t)}{\partial n} \right| ds,$$

где n – внешняя нормаль к поверхности $\partial\omega$, а k – коэффициент внутренней теплопроводности.

2. *Количество тепла, выделяемое телом массы m при изменении его температуры на ΔT равно $\gamma m \Delta T$* , где γ – теплоемкость.

Поэтому во всем объеме ω за отрезок времени $[t;\, t+\Delta t]$ вследствие изменения температуры тела выделяется количество тепла, равное (ρ – плотность тела):

$$\iiint\limits_{\omega} \gamma\,\rho \left| T(M,t+\Delta t) - T(M,t) \right| dV .$$

3. *Если $f(M,t)$ – удельная мощность источника тепла в точке M в момент t, то общее количество тепла , выделяемого источниками в элементе ω за отрезок времени $[t;\, t+\Delta t]$, равно:*

$$dt \iiint\limits_{\omega} f(M,t)\, dV .$$

Собирая эти три формулы, получим *уравнение теплового баланса*. Запишем его для случая, когда идет процесс охлаждения:

$$\begin{gathered} -\Delta t \oiint\limits_{\partial\omega} k \frac{\partial T(M,t)}{\partial n} ds = \\ = -\iiint\limits_{\omega} \gamma\,\rho \big(T(M,t+\Delta t) - T(M,t) \big) dV + \Delta t \iiint\limits_{\omega} f(M,t)\, dV . \end{gathered} \tag{8.9}$$

Перепишем это уравнение. Используя свойства производной по направлению, а затем формулу Остроградского–Гаусса, получим:

$$\oiint_{\partial\omega} k\frac{\partial u}{\partial n}dS = \oiint_{\partial\omega} k\,\mathrm{grad}\,u\,d\mathbf{S} = \iiint_{\omega}\mathrm{div}\left(k\,\mathrm{grad}\,u\right)dV .$$

После деления уравнения теплового баланса (8.9) на Δt и перехода к пределу при $\Delta t \to 0$ получим интегральное уравнение:

$$\iiint_{\omega}\left(\mathrm{div}\left(k\,\mathrm{grad}\,u\right)-\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}+f\left(M,t\right)\right)dV = 0.$$

Считая подынтегральные функции непрерывными и учитывая произвольность ω, получаем, что подынтегральная функция тождественно равна нулю. Поэтому предыдущее уравнение можно записать в виде:

$$\mathrm{div}\left(k\,\mathrm{grad}\,u\right)-\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}+f\left(M,t\right)=0 \qquad (8.10)$$

Предположим, что тело однородное, и тогда k и γ постоянны. Поэтому

$$\mathrm{div}\left(k\,\mathrm{grad}\,u\right)=k\,\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,u\right)=k\,\Delta u,$$

и тогда из (8.10) следует уравнение:

$$\Delta u = \chi\frac{\partial u}{\partial t}-F\left(M,t\right), \qquad (8.11)$$

где

$$\chi=\frac{\gamma\rho}{k},\ F\left(M,t\right)=\frac{f\left(M,t\right)}{k},\ \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Уравнение (8.11) называется *уравнением теплопроводности.* Оказывается, это уравнение описывает также процессы диффузии. В этом случае $u\left(M,t\right)$ есть концентрация диффундирующего вещества и $1/\chi$ – коэффициент диффузии.

Это обстоятельство довольно характерно для математического моделирования, когда *одна модель описывает разные процессы или является математической моделью различных объектов*.

Рассмотрим задачу распространения тепла в однородном стержне конечной длины. Пусть однородный стержень длины l теплоизолирован по всей длине. Пусть конец стержня $x=0$ поддерживается при температуре 0°, а на конце $x=l$ происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой тоже 0°. В начальный момент задано распределение температуры в стержне, и требуется найти температуру $u=u\left(x,t\right)$ в любой точке x стержня и в любой момент времени t. Если в стержне нет источников тепла, то уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\Delta u = \chi \frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (8.12)$$

В силу одномерности объекта уравнение запишется так:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \chi \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad x \in [0;l],\ t \in [0;+\infty) \qquad (8.13)$$

На конце стержня $x = 0$ граничное условие имеет вид:

$$u(0,t) = 0,\ \ t \in [0;+\infty). \qquad (8.14)$$

Рассмотрим еще один закон теплофизики, относящиеся к распространению тепла в твердом теле.

***Закон Ньютона*: величина температурного градиента (скорости изменения температуры) пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды**.

Используя этот закон, получим на конце $x = l$ (h – коэффициент теплообмена):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l} = -hu(l,t),\ \ t \in [0;+\infty) \qquad (8.15)$$

Начальное условие требуется одно, так как в уравнении (8.13) производная по t имеет первый порядок:

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0;l], \qquad (8.16)$$

причем, для согласования этого условия с краевыми условиями (6) и (7) следует наложить ограничение:

$$f(0) = 0, \quad f'(l) + h\,f(l) = 0. \qquad (8.17)$$

Система (8.13) – (8.17) является математической моделью для *задачи распространения тепла в однородном стержне конечной длины.*

9. Уточнение математических моделей

Искусство получения адекватных математических моделей не может обойтись без «метода проб и ошибок». Нередко бывает, что с помощью данной модели можно ответить на некоторые связанные с изучаемым процессом вопросы, но на другие ответов либо нет, либо они противоречат известным фактам и даже здравому смыслу. Рассмотрим следующий пример, более полно применив *закон сохранения механической энергии*.

Вытекание жидкости из сосуда

Еще раз рассмотрим полученную в п. 6.1 формулу (6.4) зависимости от времени высоты столба жидкости в сосуде:

$$H = \left(\sqrt{H_0} - \frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t \right)^2 . \qquad (9.1)$$

Пусть $s = S$. Тогда вода свободно падает в «бездонном» цилиндре, и выполняется формула свободного падения:

$$H = H_0 - \frac{gt^2}{2},$$

а это совершенно не согласуется с формулой (9.1). Возникает вопрос: какой площади должно быть «малое» отверстие, чтобы можно было бы признать модель из п. 6.1 адекватной?

С другой стороны, при $s = S$ время на полное вытекание

$$t^* = \sqrt{\frac{2H_0}{g}}$$

совпадает с временем, вычисленным по формуле (6.5) из п. 6.1:

$$t^* = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H_0}{g}} .$$

Вывод: проверяя математическая модель на основе отдельных характеристик, значения которых найдены анализом модели, можно получить согласие с натурным экспериментом и, якобы, «доказательство корректности» не вполне корректной математической модели. Но и натурные, и вычислительные эксперименты ничего не доказывают, а только могут косвенно свидетельствовать об адекватности математической модели.

Для уточнения математической модели заметим, что при движении жидкости в сосуде изменение в промежуток времени dt всей ее потенциальной и кинетической энергии плюс кинетическая энергия вытекшей воды за время dt равно нулю в силу закона сохранения энергии.

Пусть W_p – потенциальная энергия жидкости в сосуде, W_k – кинетическая энергия жидкости в сосуде, dT – кинетическая энергия жидкости, вытекшей из сосуда за время dt. Сказанное означает, что

$$\frac{dW_p}{dt}+\frac{dW_k}{dt}+\frac{dT}{dt}=0 \tag{9.2}$$

Пусть dm – масса жидкости, вытекшей за время dt. Так как $dm=\rho dV=\rho S\,dH$, то

$$W_p=\int_0^H gH\,dm=\rho gS\int_0^H H\,dH=\frac{\rho gS}{2}H^2. \tag{9.3}$$

Введем упрощающее допущение: в силу несжимаемости жидкости скорость движения всех ее частиц вниз (по оси) одинакова и равна $\dot{H}$. Тогда кинетическая энергия всей жидкости в сосуде равна:

$$W_k=\frac{m\dot{H}^2}{2}=\frac{\rho SH\,\dot{H}^2}{2}. \tag{9.4}$$

Введенное предположение игнорирует движение жидкости в горизонтальном направлении в нижней части сосуда, около сливного отверстия. Оно тем более верно, чем больше длина сосуда по сравнению с площадью сечения и чем больше отверстие по сравнению с площадью сечения.

Скорость изменения кинетической энергии жидкости, вытекающей за время dt, может быть вычислена по формуле:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{1}{dt}\left(dm\frac{v^2}{2}\right)=\frac{1}{dt}\left(\rho S\,\dot{H}\,dt\frac{v^2}{2}\right)=\rho S\,\dot{H}\,\frac{v^2}{2}. \tag{9.5}$$

Подставим (9.3), (9.4) и (9.5) в (9.2). Получим после дифференцирования:

$$\rho S\,\frac{\dot{H}^3}{2}+\rho S\,H\,\dot{H}\,\ddot{H}-\rho S+\rho S\left(\frac{S}{s}\right)^2\frac{\dot{H}^2}{2}=0,$$

$$\ddot{H}=-\left(g-\frac{1}{H}\left(\left(\frac{S}{s}\right)^2-1\right)\frac{\dot{H}^2}{2}\right). \tag{9.6}$$

Полученное уравнение 2-го порядка является математической моделью изучаемого процесса опускания уровня жидкости в сосуде с отверстием в дне сосуда при сделанном упрощающем допущении.

Проанализируем полученное уравнение. Заметим, что при $s=S$ уровень жидкости, как следовало ожидать, падает с ускорением свободного падения g. Далее, пусть $\dot{H}^*$ – значение скорости $\dot{H}$, обращающее в ноль правую часть уравнения (9.6). Очевидно,

$$\dot{H}^*=-\sqrt{\frac{2gH\,s^2}{S^2-s^2}}\,. \tag{9.7}$$

Процесс происходит так. Сначала $\dot{H}=0$, потом в силу (6) скорость движения уровня возрастает, пока $\dot{H}<\dot{H}^*$, потом убывает, когда $\dot{H}>\dot{H}^*$. Можно показать, что $\dot{H}$ стабилизируется около $\dot{H}^*$. Поэтому приближенно можно заменить в (7) $\dot{H}^*$ на $\dot{H}$: $\dot{H} = -\frac{s}{S}\sqrt{\frac{2gH}{1-\left(s/S\right)^2}}$. Тогда получится математическая модель как уточнение уравнения (9.3) из п. 6.1, из которого видно, как «малая» величина s/S влияет на результат. Дифференцируя последнее уравнение, получим вместо (6.4) из п. 6.1:

$$H = \left(\sqrt{H_0} - \frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2\left(1-s^2/S^2\right)}}\,t\right)^2.$$

10. Некорректные математические модели. Проверка корректности математической модели использованием различных фундаментальных законов

Вопрос о том, в какой мере математическая модель правильно отражает свойства изучаемого объекта, является ключевым в математическом моделировании. Причиной неадекватности модели могут быть различные источники. Во-первых, использованные упрощающие условия, например, заведомо нелинейные свойства «аппроксимируются» линейными. Во-вторых, могут быть некорректно применены физические законы. Таким примером является математическая модель экспериментального вычисления скорости пули, полученная в п. 4.1.

10.1. Закон сохранения импульса. Экспериментальное вычисление скорости пули

Закон сохранения импульса: **в изолированной системе суммарное количество движения не изменяется:**

$$\sum m_i v_i = const\,.$$

Применение для нахождения величины V (скорости системы «пуля—груз» сразу после столкновения) закона сохранения импульса, а не закона сохранения механической энергии, приводит к другим результатам. Убедимся, что для скорости пули v получается формула, дающая значение в $\sqrt{(m+M)/m}$ раз меньше, чем получающееся по формуле (4.2), п. 4.1.

Действительно, из закона сохранения импульса (количества движения) следует: в момент контакта количество движения пули и количество движения системы «пуля—груз» совпадают:

$$mv = (M+m)V\,, \tag{10.1}$$

Второе равенство (4.1) сохраняется:

$$(M+m)\frac{V^2}{2} = (M+m)gl(1-\cos\alpha). \tag{10.2}$$

Исключая из системы (10.1), (10.2) скорость V, получим:

$$v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}\,,$$

что и требовалось. Например, если масса груза в 9 раз больше массы пули, то скорость пули по последней формуле в 3 раза выше, чем по формуле (4.2), п. 4.1, что свидетельствует о явной некорректности первой модели.

10.2. Закон сохранения энергии. Движение шарика, соединенного с пружиной

Подходы, с помощью которых строились модели, не должны, разумеется, противоречить другим фундаментальным законам природы. Соответствующая проверка непротиворечивости (если она возможна) весьма полезна для установления правильности моделей. Поясним это, используя для вывода уравнения (4.9), не *закон Ньютона*, а *закон сохранения энергии.* Поскольку точка крепления пружины неподвижна, то стенка не совершает работу над системой «пружина—шарик» (и наоборот), и ее полная механическая энергия E остается постоянной. Вычислим ее. Кинетическая энергия определяется движением шарика (пружина считается невесомой):

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\left(dr/dt\right)^2}{2}.$$

Потенциальная энергия системы «содержится» в пружине, ее нетрудно найти, определив работу, необходимую для растяжения (сжатия) пружины на величину r (закон Гука используем и в этом случае):

$$E_n = -\int_0^r F\,ds = \int_0^r ks\,ds = \frac{kr^2}{2}.$$

Закон сохранения механической энергии в данном случае уместен, так как потери механической энергии в данном процессе незначительны вследствие малого трения. В этом – существенное отличие данного процесса от рассмотренного выше экспериментального исследования скорости пули. Там расход механической энергии на нагревание объекта привел к существенной потере точности математической модели.

Для неизменной со временем величины $E = E_к + E_п$ (интеграла энергии) получаем

$$E = \frac{m\left(dr/dt\right)^2}{2} + \frac{kr^2}{2}.$$

Так как $dE/dt = 0$, то, продифференцировав интеграл энергии, получаем, что в любой момент времени имеет место равенство:

$$m\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} + kr\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt}\left(\frac{d^2r}{dt^2} + kr\right) = 0.$$

Следовательно, в любой момент, когда шарик движется, т.е. $dr/dt \neq 0$, имеет место уравнение (4.9), откуда следует правильность его получения первым способом.

В рассмотренных моделях главную роль играли фундаментальные законы, определявшие происхождение и величину сил, действующих на объект, а второй закон Ньютона был как бы вспомогательным и применялся на последней стадии построения модели. Конечно же, такое деление чисто условно. Ведь если речь идет о задачах динамики, то можно использовать и другую схему – сначала связать с помощью закона Ньютона проекции ускорения тела с проекциями действующих на него сил, а затем, исходя из тех или иных соображений, вычислить эти силы как функции координат, получив замкнутую модель.

Вопросы для самоконтроля

1. Сущность математического моделирования.
2. Общие принципы построения математических моделей.
3. Типы рациональных рассуждений.
4. Фундаментальные законы природы как средство построения математических моделей. Закон сохранения энергии. Экспериментальное вычисление скорости пули.
5. Фундаментальные законы природы как средство построения математических моделей. Закон сохранения массы. Распад радиоактивного вещества.
6. Фундаментальные законы природы как средство построения математических моделей. Закон сохранения импульса. Принцип реактивного движения.
7. Фундаментальные законы природы как средство построения математических моделей. Законы 2-й Ньютона и Гука. Движение шарика, соединенного с пружиной.
8. Проверка корректности математической модели ее построением на основе различных подходов. Движение шарика, присоединенного к пружине. Законы 2-й Ньютона и Гука. Закон сохранения энергии.
9. Вариационные принципы как средство построения математических моделей. Принцип преломления света Ферма.
10. Применение аналогий при построении моделей. Вытекание жидкости из сосуда с малым отверстием.
11. Применение аналогий при построении моделей. Модель Мальтуса.
12. Нелинейные математические модели. Популяционные модели. Уточнение теории Мальтуса.
13. Колебания упругих тел. Волновое уравнение.
14. Уравнение теплопроводности.
15. Уточнение математической модели. Вытекание жидкости из сосуда
16. Некорректные математические модели. Закон сохранения импульса. Экспериментальное вычисление скорости пули.
17. Проверка корректности математической модели использованием различных законов. Закон сохранения энергии. Движение шарика, соединенного с пружиной.

Библиографический список

1. Бабушка И. Численные процессы решения дифференциальных уравнений / И. Бабушка, Э. Витасек, М. Прагер. – М.: Мир, 1969.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Решение типичных и трудных задач: Учебное пособие / Г.Н. Берман. – СПб.: Издательство «Лань», 2007. – 608 с.
3. Блехман И.И. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов / И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. – Киев: Наукова думка, 1976. – 268 с.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. Москва –Ижевск:, Институт компьютерных технологий, 2004. — 288 с.
5. Дильман, В.Л. Математическое моделирование критических состояний мягких прослоек в неоднородных соединениях / В.Л. Дильман, Т.В. Ерошкина. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 276 с.
6. Кальницкий Л.А. Специальный курс высшей математики для втузов. Учебное пособие / Л.А. Кальницкий, Д.А. Добротин, В.Ф. Жевержеев. – М.: Высшая школа, 1976. – 389 с.
7. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. – Изд. 3-е, испр. / А.Д. Мышкис. – М.: КомКнига, 2007. – 192 с.
8. Неймарк Ю.И. Математическое моделирование как наука и искусство: Учебник. −2-е изд., испр. и доп. / Ю.И. Неймарк. − Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2010. − 420 с.
9. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойя. М.: ИЛ.
10. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд. / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.